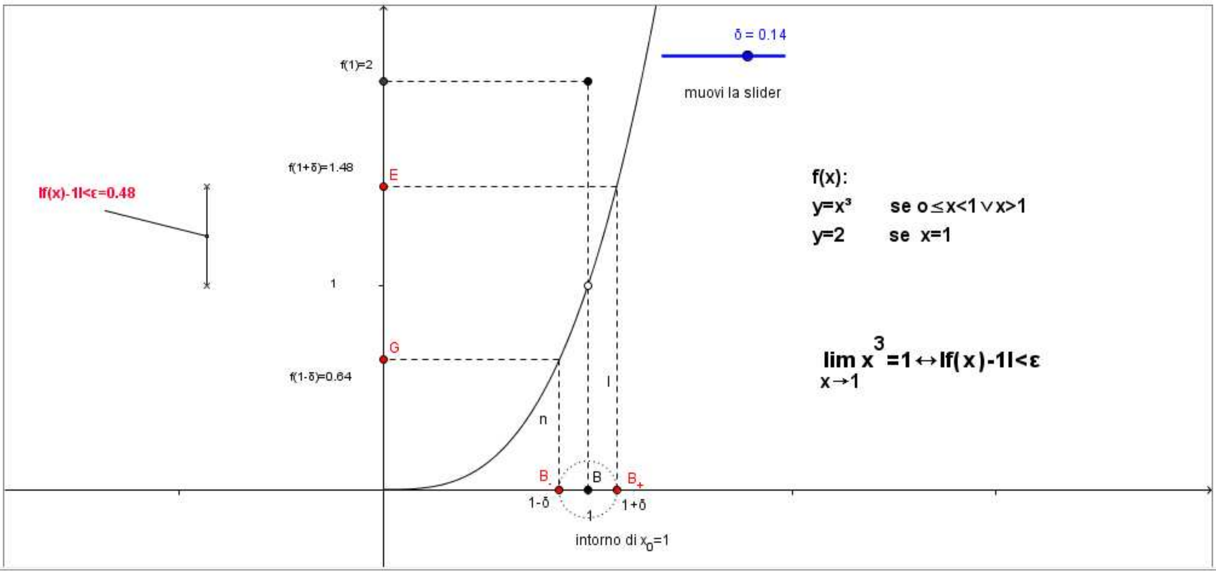
TEORIA SUI LIMITI

DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE AD UN VALORE FINITO

Si dice che , per x che tende a c, la funzione y=f(x) ha per limite l e si scrive:

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x)=l} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)-l|<\varepsilon \\ x\in I(c) \end{cases}$$

DEFINIZIONE:
Sia y=f(x) una funzione definita in un intorno completo I del punto c, escluso al più il punto c. Si dice che, per x tendente a c, la funzione y=f(x) ha per limite l se:
comunque si scelga un numero ε>0, arbitrariamente piccolo, si può determinare in corrispondenza di esso un intorno completo ci c, contenuto in I, tale che, per ogni x appartenente a tale intorno (escluso al più x=c) si abbia che lf(x)-ll<ε.



ESEMPIO DI VERIFICA DI UN LIMITE

Per verificare se il risultato di un limite è corretto basta applicare la definizione, ovvero

$\lim_{x\to c} f(x)=l$ se e solo se qualunque x appartenente ad un I(c) si ha che $|f(x)-l|<\varepsilon$ con $\varepsilon>0$ e molto piccolo.

<u>ESEMPIO:</u>

verificare che $\lim_{x\to 2} x^2-1=3$; deve risultare $|x^2-1-3|<\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$, si ha:

$-\varepsilon<x^2-4<+\varepsilon$ da cui $\begin{cases} x^2-4>-\varepsilon \\ x^2-4<\varepsilon \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-(4-\varepsilon)>0 \\ x^2-(4+\varepsilon)<0 \end{cases}$

2

$-\sqrt{4+\varepsilon}$ $-\sqrt{4-\varepsilon}$ $\sqrt{4-\varepsilon}$ $\sqrt{4+\varepsilon}$

******************x---------------x*********************

X X

-------x***************************************x----------

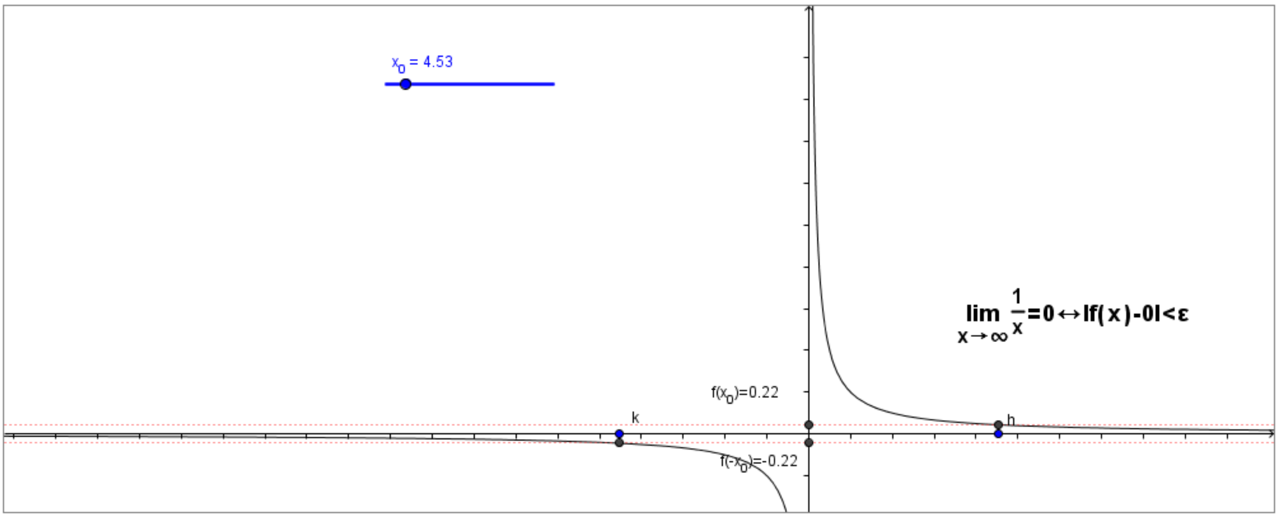
$x\in\left(\sqrt{4-\varepsilon};\sqrt{4+\varepsilon}\right)$, intorno completo di x=2, c.v.d.

DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE AD UN VALORE INFINITO

Si dice che , per x che tende a infinito, la funzione y=f(x) ha per limite l e si scrive:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=l} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)-l|<\varepsilon \\ x\in I(\infty) \end{cases}$$

DEFINIZIONE:
Sia y=f(x) una funzione definita in un intorno I di infinito. Si dice che, per x tendente all'infinito la funzione y=f(x) ha per limite l se:
comunque si scelga un numero ε>0, arbitrariamente piccolo, si può determinare in corrispondenza di esso un intorno di infinito, contenuto in I, tale che, per ogni x appartenente a tale intorno si abbia che lf(x)-ll<ε.



Muovi la slider facendo variare x_0 ed osserva come varia la differenza tra f(x) e il valore del limite.

PROF.SSA MAIOLINO DANIELA, Creato con GeoGebra

ESEMPIO DI VERIFICA DI UN LIMITE

Per verificare se il risultato di un limite è corretto basta applicare la definizione, ovvero

$\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ se e solo se qualunque x appartenente ad un I(∞) si ha che $|f(x)-l|<\varepsilon$ con $\varepsilon>0$ e molto piccolo.

<u>ESEMPIO:</u>

verificare che $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=1$; deve risultare $\left|\frac{x-1}{x}-1\right|<\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0 \Rightarrow$ un intorno di x=2; si ha

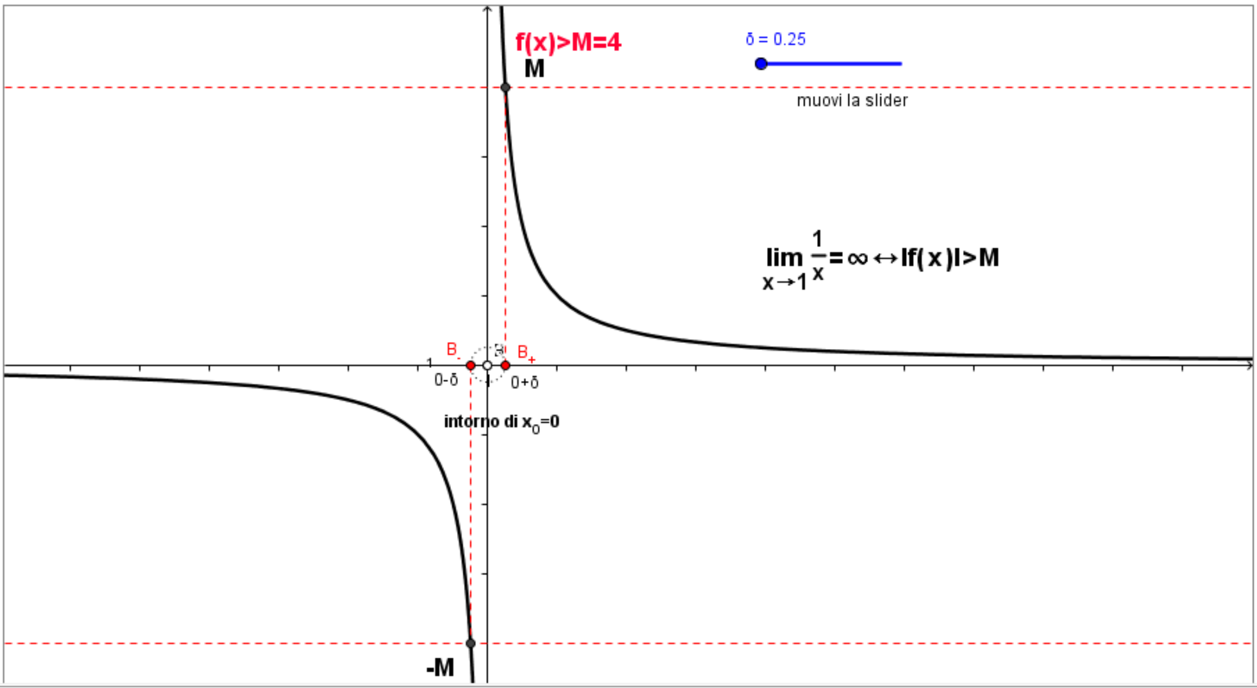
$$\left|\frac{x-1-x}{x}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-1}{x}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|x|}<\varepsilon \Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x<-\frac{1}{\varepsilon}\vee x>+\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\varepsilon}\right)\cup\left(+\frac{1}{\varepsilon};+\infty\right) \Rightarrow x\in I(\infty)$$, c.v.d.

DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE AD UN VALORE FINITO

Si dice che , per x che tende ad un valore finito, la funzione y=f(x) ha per limite infinito e si scrive:

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x)=\infty} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)|>M \\ x\in I(c) \end{cases}$$

DEFINIZIONE:
Sia y=f(x) una funzione definita in un intorno completo I del punto c, con sclusione al più del punto c. Si dice che, per x tendente a c la funzione y=f(x) ha per limite infinito se:
comunque si scelga un numero M>0, arbitrariamente grande, si può determinare in corrispondenza a esso un intorno ompleto di c, contenuto in I, tale che, per ogni x appartenente a tale intorno (escluso al più x=c) si abbia che If(x)I>M.



ESEMPIO DI VERIFICA DI UN LIMITE

Per verificare se il risultato di un limite è corretto basta applicare la definizione, ovvero

$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ se e solo se qualunque x appartenente ad un I(c) si ha che $|f(x)|>M$ con $\forall M\rangle 0$ e molto grande.

<u>ESEMPIO:</u>

verificare che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$; deve risultare $\left|\frac{1}{x}\right|>M \quad \forall M\rangle 0 \quad \Rightarrow$ un intorno di infinito; si ha

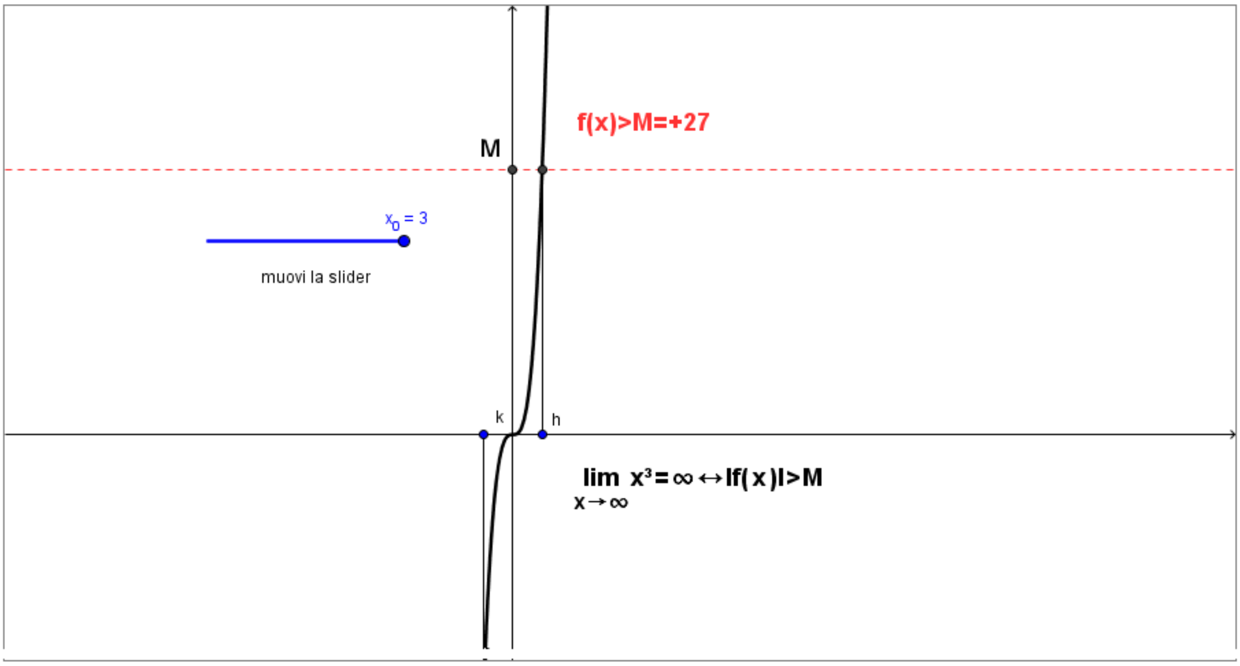
$$\left|\frac{1}{x}\right|>M \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|}>M \Rightarrow |x|<\frac{1}{M} \Rightarrow -\frac{1}{M}<x<\frac{1}{M} \quad \Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{M};+\frac{1}{M}\right) \Rightarrow x\in I(0)$$, c.v.d.

DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE AD UN VALORE INFINITO

Si dice che , per x che tende ad un valore finito, la funzione y=f(x) ha per limite infinito e si scrive:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)|>M \\ x\in I(\infty) \end{cases}$$

DEFINIZIONE:
Sia y=f(x) una funzione definita in un intorno I di infinito, si dice che, per x tendente a infinito la funzione y=f(x) ha per limite infinito se: comunque si scelga un numero M>0, arbitrariamente grande, si può determinare in corrispondenza a esso un intorno di infinito tale che, per ogni x appartenente a tale intorno si abbia If(x)I>M.



ESEMPIO DI VERIFICA DI UN LIMITE

Per verificare se il risultato di un limite è corretto basta applicare la definizione, ovvero

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ se e solo se qualunque x appartenente ad un I(∞) si ha che $|f(x)|>M$ con $M\rangle 0$ e molto grande.

<u>ESEMPIO:</u>

verificare che $\lim_{x\to\infty} x^3=\infty$; deve risultare $|x^3|>M \quad \forall M\rangle 0 \Rightarrow$ un intorno di infinito; si ha

$|x^3|>M \Rightarrow x^3<-M \vee x^3>+M \Rightarrow x<\sqrt[3]{-M} \vee x>\sqrt[3]{+M} \Rightarrow x\in\left(-\infty;\sqrt[3]{-M}\right)\cup\left(\sqrt[3]{+M};+\infty\right) \Rightarrow x\in I(\infty)$, c.v.d.

TEOREMI SUI LIMITI

T: unicità del limite

Se per x che tende a c, finito o infinito, $\lim_{x \to \pm c} f(x) = l$, si ha che questo limite è unico.

T: della permanenza del segno

Se $\lim_{x \to \pm c} f(x) = \pm l \neq 0$ esiste un intorno di c per tutti i punti del quale, escluso al più c, l valori della funzione hanno lo stesso segno del limite ovvero f(x)>0, se l>0 oppure f(x)<0 se l<0.

T1C: primo teorema del confronto

Se risulta f(x)≤g(x) ≤h(x) e $\lim_{x \to \pm c} f(x) = \pm l$ e $\lim_{x \to \pm c} h(x) = \pm l$ allora anche $\lim_{x \to \pm c} g(x) = \pm l$

T2C: secondo teorema del confronto

Se risulta $|f(x)| \leq |g(x)|$ e $\lim_{x \to \pm c} g(x) = 0$ allora anche $\lim_{x \to \pm c} f(x) = 0$

T3C: terzo teorema del confronto

Se risulta $|g(x)| \geq |f(x)|$ e $\lim_{x \to \pm c} f(x) = \pm\infty$ allora anche $\lim_{x \to \pm c} g(x) = \pm\infty$

FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE: Una funzione di equazione y=f(x) si dice <u>continua in un punto c</u> quando esiste il limite della funzione per x tendente a c e questo limite è uguale al valore della funzione in quel punto, cioè quando si verificano le seguenti condizioni:

1) f(c)=l
2) $\lim_{x \to c} f(x) = l$
3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = l$

Sono continue le funzioni:		valori di continuità
Costanti	f(x)=k	$\forall x \in \Re$
Lineari	f(x)=x	$\forall x \in \Re$
irrazionali con indice pari	$f(x) = \sqrt[2n]{x}$	x≥ 0
irrazionali con indice dispari	$f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$	$\forall x \in \Re$
esponenziali	$f(x) = a^x \quad a > 0$	$\forall x \in \Re$
logaritmiche	$f(x) = \log_a x \quad a > 0,\ a \neq 1$	$\forall x \in \Re$
goniometriche	f(x)=senx; f(x)=cosx	$\forall x \in \Re$
goniometriche	f(x)=tanx	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
goniometriche	f(x)=cotx	$x \neq k\pi$

come si vede ogni funzione è continua nel proprio dominio.

CALCOLO DEI LIMITI DI FUNZIONI CONTINUE

I limiti delle funzioni continue si possono calcolare sostituendo al posto della x il valore a cui tendono.
Esempio:
$$\lim_{x\to 2} 3^x = f(3) = 3^2 = 9$$

TEOREMA: Limite della somma di due funzioni:
siano f(x) e g(x) due funzioni che ammettono, per x che tende a c (c finito o infinito), limiti finiti l_1 ed l_2, allora il limite della somma delle due funzioni esiste ed è la somma dei loro limiti:

$$\boxed{\lim(f(x)+g(x))=\lim f(x)+\lim g(x)= l_1+l_2}$$

Si possono avere i seguenti casi:
a) lim (f(x)+k)= l_1+k
b) $l_1=+\infty$ ed $l_2=+\infty$ lim(f+g)=$+\infty+\infty=+\infty$
c) $l_1=-\infty$ ed $l_2=-\infty$ lim (f+g)=$-\infty-\infty=-\infty$
d) l_1=k ed $l_2=+\infty$ lim (f+g)=$k+\infty=+\infty$
e) se dalla somma risulta $[+\infty-\infty]$ si ha una FORMA INDETERMINATA.

SOMMA E DIFFERENZE DI FUNZIONI CONTINUE SONO FUNZIONI CONTINUE.

TEOREMA: Limite del prodotto di due funzioni:
siano f(x) e g(x) due funzioni che ammettono, per che tende a c (c finito o infinito), limiti finiti l_1 ed l_2, allora il limite del prodotto di due funzioni esiste ed è il prodotto dei loro limiti:

$$\boxed{\lim(f(x)*g(x))=\lim f(x)*\lim g(x)= l_1*l_2}$$

Si possono avere i seguenti casi:
f) lim (k f(x))= k l
g) $l_1=+\infty$ ed $l_2=+\infty$ lim(f+g)=$+\infty*+\infty=+\infty$
h) $l_1=-\infty$ ed $l_2=-\infty$ lim (f+g)=$-\infty*(-\infty)=+\infty$
i) lim $(f(x))^n=l^n$
j) se dal prodotto risulta $[0\cdot\infty]$ si ha una FORMA INDETERMINATA.

IL PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO I E' UNA FUNZIONE CONTINUA NELLO STESSO INTERVALLO.

$\Rightarrow$ Le funzioni razionali intere ovvero i polinomi di grado n sono funzioni continue in R.

$\Rightarrow$ Limite di una potenza: $\lim\ f(x)^n = (\lim f(x))^n$

$\Rightarrow$ Limite del reciproco di una funzione: $\lim \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l} \quad con\ l \neq 0$

TEOREMA: Limite del quoziente di due funzioni:
siano f(x) e g(x) due funzioni che ammettono, per che tende a c (c finito o infinito), limiti finiti l_1 ed $l_2 \neq 0$, allora il limite del quoziente due funzioni esiste ed è il quoziente dei loro limiti:

$$\boxed{\lim(f(x)/g(x))=\lim f(x)/\lim g(x)= l_1/l_2}$$

Si possono avere i seguenti casi:

k) $\lim \dfrac{k}{f(x)} = \dfrac{k}{l} \quad con \;\; l \neq 0 \qquad \dfrac{k}{\infty} \to 0 \quad ; \quad \dfrac{k}{0} \to \infty$

l) Se $l_1=k\neq 0$ ed $l_2=0 \;\Rightarrow\; \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{k}{0} \to \infty$

m) Se $l_1=\infty$ ed $l_2=l \;\Rightarrow\; \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{l} \to \infty$ anche se l=0

n) Se $l_1=k$ ed $l_2=\infty \;\Rightarrow\; \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{k}{\infty} \to 0$

o) $\dfrac{1}{\infty} \to 0 \quad ; \quad \dfrac{1}{0} \to \infty \quad ; \quad \dfrac{\infty}{k} \to 0$

p) Se dal quoziente risulta $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] e \left[\dfrac{0}{0}\right]$ si hanno FORME INDETERMINATE.

IL QUOZIENTE DI FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO I E' UNA FUNZIONE CONTINUA IN TUTTI I PUNTI DELLO STESSO INTERVALLO IN CUI RISULTA $g(x)\neq 0$.

$\Rightarrow$ Le funzioni razionali fratte sono continue per tutti i valori di x che non annullano il denominatore.

COME SI RISOLVONO ALCUNE FORME INDETERMINATE

Quando, nella risoluzione di un limite, si ottiene come risultato una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty \quad \dfrac{\infty}{\infty} \quad \dfrac{0}{0} \quad 0 \cdot \infty$, si può calcolare il limite mettendo in pratica una "trasformazione" algebrica della funzione o scomponendo e semplificando. Riassumiamo i casi più comuni:

CASO 1: limite per x che tende all'infinito di una funzione razionale di grado n

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ...$$

Se si trova la forma indeterminata $\infty - \infty$ si raccoglie la x di grado massimo e si ha che il limite da calcolare è uguale al limite del termine di grado massimo ovvero

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

CASO 2: limite per x che tende ad un valore finito di una funzione fratta; se si trovano le forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ allora si devono scomporre numeratore e denominatore e semplificare la frazione, prima di ricalcolare il limite.

CASO 3: limite per x che tende all'infinito di una funzione fratta; se si trovano le forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ allora si deve raccogliere la x di grado massimo sia al numeratore che al denominatore e si ha che il limite sarà uguale al limite del rapporto dei termini di grado massimo.

RIEPILOGO ASINTOTI

L'asintoto è una retta a cui la curva che rappresenta la funzione nel piano cartesiano si avvicina indefinitivamente senza toccarla mai (si dice che la curva è tangente all'asintoto all'infinito). Possono esistere tre tipi di asintoti:

ASINTOTI VERTICALI di equazione X=$\pm$C

Esistono soprattutto per le funzioni fratte e si trovano per quei i valori che annullano il denominatore; se esiste, l'asintoto verticale, si trova quando il limite per x che tende ad un valore finito, tende all'infinito ovvero

$$\lim_{x\to\pm c} f(x) = \pm\infty$$

ASINTOTI ORRIZZONTALI di equazione Y=$\pm$C

Se esiste, l'asintoto orizzontale, si trova quando il limite per x che tende all'infinito, tende ad un valore finito ovvero

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm c$$

ASINTOTI OBLIQUI di equazione Y=mx+q

Se esiste, l'asintoto obliquo, si trova quando il limite per x che tende all'infinito, tende ad un valore infinito ovvero

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

In tal caso se nel calcolo dei limiti si ottiene questo risultato, si deve procedere calcolando prima il coefficiente angolare e poi l'ordinata all'origine q

m=$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm c$ **con c** $\neq \infty$ (il coefficiente angolare non può essere infinito)

q=$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \pm c$ (ovviamente se m=0 e se pure q=0 la retta non esiste).